КОНСТРУКЦИИ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ

Светлана АЛЕЩЕНКО

Тираспольский государственный университет

CONSTRUCŢIA INELELOR PSEUDONORMATE CARE PĂSTREAZĂ IZOMORFISMUL SEMIIZOMETRIC

Se examinează noţiunea de izomorfism semiizometric al inelelor pseudonormate. Se arată că izomorfismul semiizometric se păstrează la trecerea la limită şi la supremumul pseudonormelor, la construcţia sumei directe a inelelor pseudonormate.

Cuvinte-cheie: *pseudonormă, inel pseudonormat, homomorfism isometric, izomorfism semiizometric, suma directă a inelelor.*

CONSTRUCTIONS OF PSEUDONORMED RINGS WHICH KEEP A SEMI-ISOMETRIC ISOMORPHISM

In the present work the conception of a semi-isometric isomorphism of pseudonormed rings is studied. It's shown that a semi-isometric isomorphism is kept for the limit and supremum of pseudonorms, for the direct sum of pseudonormed rings.

Keywords: *pseudonorm, pseudonormed ring, isometric homomorphism, semi-isometric isomorphism, the direct sum of rings.*

1. Введение

1.1. Определение. Вещественнозначную функцию ξ, заданную в кольце R, называют псевдонормой, если выполнены следующие условия:

I. $\xi(r) \geq 0$ для любого $r \in R$;

II. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

III. $\xi(-r) = \xi(r)$ для любого $r \in R$;

IV. $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$;

V. $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.

Кольцо R с заданной в нем псевдонормой называют псевдонормированным кольцом и обозначают (R, ξ).

Следующая теорема об изоморфизме часто применяется в алгебре.

1.2. Теорема. Пусть R – кольцо, B – подкольцо кольца R. Если N – идеал в R, то существует изоморфизм $\varphi : B/(B \cap N) \to (B+N)/N$.

Эта теорема для топологических и псевдонормированных колец не всегда имеет место, поскольку на изоморфизм таких колец накладывается условие сохранения топологии (псевдонормы), т.е. изоморфизм топологических колец должен быть гомеоморфизмом, а изоморфизм псевдонормированных колец должен быть изометрическим. В [1] было доказано, что ничего больше, чем неравенство $\tilde{\xi}(\varphi(x)) \leq \xi(x)$ для кольцевого изоморфизма φ, получить нельзя. Поэтому на подкольцо B приходится накладывать дополнительные условия, например, потребовать, чтобы B было идеалом в кольце R. В [1] было рассмотрено следующее понятие.

1.3. Определение. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца. Изоморфизм $\varphi : R \to \bar{R}$ назовём полуизометрическим, если существует такое псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$, что выполнены следующие условия:

- $\boldsymbol{R}$ является идеалом в кольце $\hat{\boldsymbol{R}}$;
- $\hat{\xi}\big|_{\boldsymbol{R}} = \xi$;
- изоморфизм $\boldsymbol{\varphi}$ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма $\hat{\boldsymbol{\varphi}}: (\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\xi}) \to (\overline{\boldsymbol{R}}, \overline{\xi})$

псевдонормированных колец, т.е. такого гомоморфизма $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, что

$$\overline{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})) = \inf\{\hat{\xi}(\hat{r}+i) \mid i \in \ker\hat{\varphi}\} \text{ для всех } \hat{r} \in \hat{R}.$$

В [1] была доказана следующая теорема.

1.4. Теорема (критерий полуизометрического изоморфизма). Пусть $(\boldsymbol{R}, \xi)$ и $(\overline{\boldsymbol{R}}, \overline{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{R} \to \overline{\boldsymbol{R}}$ – кольцевой изоморфизм. Изоморфизм $\boldsymbol{\varphi}: (\boldsymbol{R}, \xi) \to (\overline{\boldsymbol{R}}, \overline{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец тогда и только тогда, когда

$$\frac{\xi(a \cdot b)}{\xi(b)} \le \overline{\xi}(\varphi(a)) \le \xi(a) \quad \text{и} \quad \frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \le \overline{\xi}(\varphi(a)) \le \xi(a)$$

для любых $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

В настоящей работе рассмотрим некоторые конструкции псевдонормированных колец, сохраняющие полуизометрический изоморфизм.

2. Вспомогательные неравенства

2.1. Определение. Действительные числа $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}^*$, где $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{p}^* > \boldsymbol{1}$, называют сопряженными, если $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$.

2.2. Предложение. Для любых действительных чисел $\boldsymbol{a_k} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b_k} \ge \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{k = 1, 2, \dots, n}$, и для любого действительного числа $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{p^*}\right)^{1/p^*},$$

где $\boldsymbol{p}^*$ – сопряженное число к $\boldsymbol{p}$.

2.3. Предложение. Для любых действительных чисел $\boldsymbol{a_{ik}} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \dots, n}$ и для любого действительного числа $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{1}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\right)^{p}\right)^{1/p} \le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{p}\right)^{1/p}.$$

2.4. Предложение. Пусть для действительных чисел $\boldsymbol{a_k} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \dots, n}$ задано семейство функций $\{G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid 1 \le \gamma \le \infty\}$ таких, что $G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^\gamma\right)^{1/\gamma}$ при $1 \le \gamma < \infty$ и $G_\infty(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ при $\gamma = \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) = G_\infty(a_1, a_2, \dots, a_n)$ для любых $a_k \ge 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;

2) $G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) \ge G_\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ для всех $1 \le \gamma \le \sigma \le \infty$ и $a_k \ge 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;

3) $\sup\limits_{\gamma > 1} G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) = G_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ для любых $a_k \ge 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство предложений 2.2, 2.3 и 2.4 можно найти в [4].

3. Основные результаты

3.1. Определение. Направленным множеством называют частично упорядоченное множество $\boldsymbol{\Gamma}$, удовлетворяющее следующему условию: для любых двух элементов $\boldsymbol{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma}$ найдется элемент $\boldsymbol{\gamma_3 \in \Gamma}$, такой, что $\boldsymbol{\gamma_3 \ge \gamma_1}$ и $\boldsymbol{\gamma_3 \ge \gamma_2}$.

3.2. Определение. Пусть $\boldsymbol{X}$ – топологическое пространство, $\boldsymbol{x_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma}$ – последовательность элементов из $\boldsymbol{X}$ по направленному множеству $\boldsymbol{\Gamma}$. Элемент $\boldsymbol{a \in X}$ называется пределом последовательности $\boldsymbol{x_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma}$ по направленному множеству $\boldsymbol{\Gamma}$, если для любой окрестности $\boldsymbol{V}$ точки $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{X}$ найдется элемент $\boldsymbol{\gamma_0 \in \Gamma}$, такой, что $\boldsymbol{x_\gamma \in V}$ для всех $\boldsymbol{\gamma \ge \gamma_0}$. Обозначают $\boldsymbol{a = \lim_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma}$.

3.3. Предложение. Пусть $\boldsymbol{\Gamma}$ – некоторое множество, $\boldsymbol{\xi_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma}$ – семейство псевдонорм в кольце $\boldsymbol{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\boldsymbol{\Gamma}$ – направленное множество, и для любого $\boldsymbol{r \in R}$ существует предел $\boldsymbol{\lim_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \; r}$ по направленному множеству $\boldsymbol{\Gamma}$, причем $\boldsymbol{\lim_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \; r \ne 0}$ для каждого $\boldsymbol{r \ne 0}$, то функция $\boldsymbol{\xi}$, заданная как $\boldsymbol{\xi \; r = \lim_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \; r}$ для каждого $\boldsymbol{r \in R}$, является псевдонормой в кольце $\boldsymbol{R}$;

2) если для любого $\boldsymbol{r \in R}$ множество $\boldsymbol{\xi_\gamma \; r \,|\, \gamma \in \Gamma}$ ограничено сверху, то функция $\boldsymbol{\xi}$, заданная как $\boldsymbol{\xi \; r = \sup_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \; r}$ для каждого $\boldsymbol{r \in R}$, является псевдонормой в кольце $\boldsymbol{R}$.

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию $\boldsymbol{\xi \; r = \lim_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma \; r}$. Покажем, что $\boldsymbol{\xi}$ является псевдонормой в кольце $\boldsymbol{R}$. Очевидно, что выполнены условия: I. $\boldsymbol{\xi \; r \ge 0}$ для любого $\boldsymbol{r \in R}$; II. $\boldsymbol{\xi \; r = 0}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = 0}$; III. $\boldsymbol{\xi \; -r = \xi \; r}$ для всех $\boldsymbol{r \in R}$.

Покажем, что для всех $\boldsymbol{r_1, r_2 \in R}$ выполнены условия IV. $\boldsymbol{\xi \; r_1 + r_2 \le \xi \; r_1 + \xi \; r_2}$ и V. $\boldsymbol{\xi \; r_1 \cdot r_2 \le \xi \; r_1 \cdot \xi \; r_2}$. Из определения 3.2 следует, что для любого $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ существуют $\boldsymbol{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma}$, такие, что

$$\boldsymbol{\left| \xi_\gamma \; r_1 - \xi \; r_1 \right| < \varepsilon} \text{ для всех } \boldsymbol{\gamma \ge \gamma_1},$$

$$\boldsymbol{\left| \xi_\gamma \; r_2 - \xi \; r_2 \right| < \varepsilon} \text{ для всех } \boldsymbol{\gamma \ge \gamma_2},$$

$$\boldsymbol{\left| \xi_\gamma \; r_1 + r_2 - \xi \; r_1 + r_2 \right| < \varepsilon} \text{ для всех } \boldsymbol{\gamma \ge \gamma_3},$$

$$\boldsymbol{\left| \xi_\gamma \; r_1 \cdot r_2 - \xi \; r_1 \cdot r_2 \right| < \varepsilon} \text{ для всех } \boldsymbol{\gamma \ge \gamma_4}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\Gamma}$ – направленное множество, то существует $\boldsymbol{\gamma_5 \in \Gamma}$, такое, что $\boldsymbol{\gamma_5 \ge \gamma_1}$, $\boldsymbol{\gamma_5 \ge \gamma_2}$, $\boldsymbol{\gamma_5 \ge \gamma_3}$ и $\boldsymbol{\gamma_5 \ge \gamma_4}$. Тогда для всех $\boldsymbol{\gamma \ge \gamma_5}$ выполнены неравенства

$$\boldsymbol{\xi \; r_1 + r_2 < \xi_\gamma \; r_1 + r_2 + \varepsilon \le \xi_\gamma \; r_1 + \xi_\gamma \; r_2 + \varepsilon < \xi \; r_1 + \xi \; r_2 + 3\varepsilon};$$

$$\boldsymbol{\xi \; r_1 \cdot r_2 < \xi_\gamma \; r_1 \cdot r_2 + \varepsilon \le \xi_\gamma \; r_1 \cdot \xi_\gamma \; r_2 + \varepsilon < \; \xi \; r_1 + \varepsilon \; \cdot \; \xi \; r_2 + \varepsilon \; + \varepsilon}.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$, получим $\boldsymbol{\xi \; r_1 + r_2 \le \xi \; r_1 + \xi \; r_2}$ и $\boldsymbol{\xi \; r_1 \cdot r_2 \le \xi \; r_1 \cdot \xi \; r_2}$ для всех $\boldsymbol{r_1, r_2 \in R}$.

Значит, функция $\boldsymbol{\xi}$ действительно задает псевдонорму в кольце $\boldsymbol{R}$.

3) Рассмотрим функцию $\xi(r)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r)$. Покажем, что ξ является псевдонормой в кольце R. Очевидно, что выполнены условия: I. $\xi(r)\geq 0$ для любого $r\in R$; II. $\xi(r)=0$ тогда и только тогда, когда $r=0$; III. $\xi(-r)=\xi(r)$ для всех $r\in R$.

Покажем, что для всех $r_1,r_2\in R$ выполнены условия IV. $\xi(r_1+r_2)\leq\xi(r_1)+\xi(r_2)$ и V. $\xi(r_1\cdot r_2)\leq\xi(r_1)\cdot\xi(r_2)$. Так как $\xi(r_1+r_2)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r_1+r_2)$ и $\xi(r_1\cdot r_2)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r_1\cdot r_2)$, то из определения супремума следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$, такие, что

$$\xi(r_1+r_2)-\varepsilon<\xi_{\gamma_1}(r_1+r_2)\leq\xi(r_1+r_2),$$
$$\xi(r_1\cdot r_2)-\varepsilon<\xi_{\gamma_2}(r_1\cdot r_2)\leq\xi(r_1\cdot r_2).$$

Тогда выполнены неравенства

$$\xi(r_1+r_2)<\xi_{\gamma_1}(r_1+r_2)+\varepsilon\leq\xi_{\gamma_1}(r_1)+\xi_{\gamma_1}(r_2)+\varepsilon\leq\xi(r_1)+\xi(r_2)+\varepsilon;$$
$$\xi(r_1\cdot r_2)<\xi_{\gamma_2}(r_1\cdot r_2)+\varepsilon\leq\xi_{\gamma_2}(r_1)\cdot\xi_{\gamma_2}(r_2)+\varepsilon\leq\xi(r_1)\cdot\xi(r_2)+\varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon\to 0$, получим $\xi(r_1+r_2)\leq\xi(r_1)+\xi(r_2)$ и $\xi(r_1\cdot r_2)\leq\xi(r_1)\cdot\xi(r_2)$ для всех $r_1,r_2\in R$.

Таким образом, функция ξ является псевдонормой в кольце R. Предложение доказано.

3.4. Предложение. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi: R\to\bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R задано семейство псевдонорм $\{\xi_\gamma\,|\,\gamma\in\Gamma\}$;

2) в кольце $\bar{R}$ задано семейство псевдонорм $\{\bar{\xi}_\gamma\,|\,\gamma\in\Gamma\}$;

3) для каждого $\gamma\in\Gamma$ изоморфизм $\varphi:(R,\xi_\gamma)\to(\bar{R},\bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если Γ – направленное множество, и для любых $r\in R$ и $\bar{r}\in\bar{R}$ существуют пределы $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r)$ и $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ по направленному множеству Γ, причем $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{\xi}_\gamma(\bar{r})\neq 0$ для каждого $\bar{r}\neq 0$, то $\varphi:(R,\xi)\to(\bar{R},\bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi(r)=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r)$ и $\bar{\xi}(\bar{r})=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ для всех $r\in R$ и $\bar{r}\in\bar{R}$;

2) если для любого $r\in R$ множество $\{\xi_\gamma(r)\,|\,\gamma\in\Gamma\}$ ограничено сверху, то $\varphi:(R,\xi)\to(\bar{R},\bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi(r)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r)$ и $\bar{\xi}(\bar{r})=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ для всех $r\in R$ и $\bar{r}\in\bar{R}$.

Доказательство.

1) Рассмотрим псевдонормы $\xi(r)=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma(r)$ и $\bar{\xi}(\bar{r})=\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ в кольцах R и $\bar{R}$, соответственно. Покажем, что $\varphi:(R,\xi)\to(\bar{R},\bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм.

Поскольку при каждом $\gamma\in\Gamma$ отображение $\varphi:(R,\xi_\gamma)\to(\bar{R},\bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом, то по теореме 1.4 для любых $r,q\in R$ и $\gamma\in\Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(r\cdot q)\leq\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r))\cdot\xi_\gamma(q),\ \xi_\gamma(q\cdot r)\leq\xi_\gamma(q)\cdot\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r))\ \text{и}\ \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r))\leq\xi_\gamma(r).$$

Из определения 3.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \in \Gamma$, такие, что

$$|\xi_\gamma(r) - \xi(r)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1,$$

$$|\xi_\gamma(q) - \xi(q)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2,$$

$$|\xi_\gamma(r \cdot q) - \xi(r \cdot q)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3,$$

$$|\xi_\gamma(q \cdot r) - \xi(q \cdot r)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4,$$

$$|\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) - \bar{\xi}(\varphi(r))| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_5.$$

Поскольку Γ – направленное множество, то существует $\gamma_6 \in \Gamma$, такое, что $\gamma_6 \geq \gamma_i$ для всех $i = 1,2,3,4,5$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_6$ выполнены неравенства

$$\xi(r \cdot q) < \xi_\gamma(r \cdot q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \cdot \xi_\gamma(q) + \varepsilon < (\bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon) \cdot (\xi(q) + \varepsilon) + \varepsilon;$$

$$\xi(q \cdot r) < \xi_\gamma(q \cdot r) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(q) \cdot \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) + \varepsilon < (\xi(q) + \varepsilon) \cdot (\bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon) + \varepsilon;$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) < \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(r) + \varepsilon < \xi(r) + 2\varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \to 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(r \cdot q) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q),\ \xi(q \cdot r) \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 1.4 следует, что $\varphi: (R, \xi) \to (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм.

2) Рассмотрим псевдонормы $\xi(r) = \sup\limits_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ и $\bar{\xi}(\bar{r}) = \sup\limits_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ в кольцах R и $\bar{R}$, соответственно. Покажем, что $\varphi: (R, \xi) \to (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi: (R, \xi_\gamma) \to (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом, то по теореме 1.4 для любых $r, q \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(r \cdot q) \leq \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \cdot \xi_\gamma(q),\ \xi_\gamma(q \cdot r) \leq \xi_\gamma(q) \cdot \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r).$$

Из определения точной верхней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$, такие, что

$$\xi(r \cdot q) - \varepsilon < \xi_{\gamma_1}(r \cdot q) \leq \xi(r \cdot q),$$

$$\xi(q \cdot r) - \varepsilon < \xi_{\gamma_2}(q \cdot r) \leq \xi(q \cdot r),$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) - \varepsilon < \bar{\xi}_{\gamma_3}(\varphi(r)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)).$$

Тогда выполнены неравенства

$$\xi(r \cdot q) < \xi_{\gamma_1}(r \cdot q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}_{\gamma_1}(\varphi(r)) \cdot \xi_{\gamma_1}(q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q) + \varepsilon,$$

$$\xi(q \cdot r) < \xi_{\gamma_2}(q \cdot r) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2}(q) \cdot \bar{\xi}_{\gamma_2}(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon,$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) < \bar{\xi}_{\gamma_3}(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_3}(r) + \varepsilon \leq \xi(r) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\varepsilon \to 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(r \cdot q) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q),\ \xi(q \cdot r) \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 1.4 следует, что $\varphi: (R, \xi) \to (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм. Теорема доказана.

3.5. Следствие. Пусть $\boldsymbol{R}$ и $\bar{\boldsymbol{R}}$ – кольца, $\boldsymbol{\varphi : R \to \bar{R}}$ – кольцевой изоморфизм, $\boldsymbol{\Gamma}$ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце $\boldsymbol{R}$ задано семейство псевдонорм $\;\xi_\gamma \,\big|\, \gamma \in \boldsymbol{\Gamma}\;$;

2) в кольце $\bar{\boldsymbol{R}}$ задана псевдонорма $\bar{\xi}$;

3) для каждого $\boldsymbol{\gamma \in \Gamma}$ изоморфизм $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi_\gamma \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\boldsymbol{\Gamma}$ – направленное множество, и для любого $\boldsymbol{r \in R}$ существует предел $\boldsymbol{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}\xi_\gamma\;\boldsymbol{r}$ по направленному множеству $\boldsymbol{\Gamma}$, то $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi\;\boldsymbol{r}\; = \boldsymbol{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}\xi_\gamma\;\boldsymbol{r}$ для каждого $\boldsymbol{r \in R}$;

2) если для любого $\boldsymbol{r \in R}$ множество $\;\xi_\gamma\;\boldsymbol{r}\,\big|\,\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}\;$ ограничено сверху, то $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\xi\;\boldsymbol{r}\; = \boldsymbol{\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}}\xi_\gamma\;\boldsymbol{r}$ для каждого $\boldsymbol{r \in R}$.

3.6. Следствие. Пусть $\boldsymbol{R}$ и $\bar{\boldsymbol{R}}$ – кольца, $\boldsymbol{\varphi : R \to \bar{R}}$ – кольцевой изоморфизм, $\boldsymbol{\Gamma}$ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце $\boldsymbol{R}$ задана псевдонорма ξ ;

2) в кольце $\bar{\boldsymbol{R}}$ задано семейство псевдонорм $\;\bar{\xi}_\gamma \,\big|\, \gamma \in \boldsymbol{\Gamma}\;$;

3) для каждого $\boldsymbol{\gamma \in \Gamma}$ изоморфизм $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}_\gamma$ является полуизометрическим.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\boldsymbol{\Gamma}$ – направленное множество, и для любого $\bar{\boldsymbol{r}} \in \bar{\boldsymbol{R}}$ существует предел $\boldsymbol{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}\bar{\xi}_\gamma\;\bar{\boldsymbol{r}}$ по направленному множеству $\boldsymbol{\Gamma}$, причем $\boldsymbol{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}\bar{\xi}_\gamma\;\bar{\boldsymbol{r}}\;\boldsymbol{\neq 0}$ для каждого $\bar{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\neq 0}$, то $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм, где $\bar{\xi}\;\bar{\boldsymbol{r}}\; = \boldsymbol{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}\bar{\xi}_\gamma\;\bar{\boldsymbol{r}}$ для каждого $\bar{\boldsymbol{r}} \in \bar{\boldsymbol{R}}$;

2) если $\bar{\xi}\;\bar{\boldsymbol{r}}\; = \boldsymbol{\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}}\bar{\xi}_\gamma\;\bar{\boldsymbol{r}}$ для каждого $\bar{\boldsymbol{r}} \in \bar{\boldsymbol{R}}$, то $\boldsymbol{\varphi :}\; \boldsymbol{R},\xi \;\to\; \bar{\boldsymbol{R}},\bar{\xi}$ – полуизометрический изоморфизм.

3.7. Предложение. Пусть $\;\boldsymbol{R_k},\xi_k\;$, $\boldsymbol{k = 1,2,\ldots,n}$, – псевдонормированные кольца, и $\boldsymbol{R} = \bigoplus\limits_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{R_k} = \;\boldsymbol{r} = \;\boldsymbol{r_1,r_2,\ldots,r_n}\;\big|\,\boldsymbol{r_k \in R_k, 1 \le k \le n}\;$ – прямая сумма колец $\boldsymbol{R_k}$, $\boldsymbol{1 \le k \le n}$. Тогда каждая из функций $\zeta_\gamma\;\boldsymbol{r}\; = \left(\sum\limits_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \xi_k\;\boldsymbol{r_k}\;^{\gamma}\right)^{\boldsymbol{1}/\gamma}$, $\boldsymbol{1 \le \gamma < \infty}$, $\zeta_\infty\;\boldsymbol{r}\; = \boldsymbol{\max}\;\;\xi_k\;\boldsymbol{r_k}\;\big|\,\boldsymbol{1 \le k \le n}\;$ задает псевдонорму в кольце $\boldsymbol{R}$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\zeta_\gamma\;\boldsymbol{r}\; = \left(\sum\limits_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \xi_k\;\boldsymbol{r_k}\;^{\gamma}\right)^{\boldsymbol{1}/\gamma}$, $\boldsymbol{1 < \gamma < \infty}$. Покажем, что ζ_γ является псевдонормой в кольце $\boldsymbol{R}$.

Очевидно, что следующие условия псевдонормы выполнены: I. $\zeta_\gamma\;\boldsymbol{r}\;\boldsymbol{\ge 0}$ для любого $\boldsymbol{r \in R}$; II. $\zeta_\gamma\;\boldsymbol{r}\;\boldsymbol{= 0}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = 0}$; III. $\zeta_\gamma\;\boldsymbol{-r}\; = \zeta_\gamma\;\boldsymbol{r}$ для всех $\boldsymbol{r \in R}$.

Покажем, что выполнено условие IV. $\zeta_\gamma(a+b) \le \zeta_\gamma(a)+\zeta_\gamma(b)$ для всех $a,b \in R$. Так как ξ_k – псевдонорма в кольце R_k, то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k(a_k+b_k) \le \xi_k(a_k)+\xi_k(b_k).$$

В силу предложения 2.3 получим

$$\zeta_\gamma(a+b) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k+b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)+\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma(a)+\zeta_\gamma(b).$$

Покажем, что выполнено условие V. $\zeta_\gamma(a\cdot b) \le \zeta_\gamma(a)\cdot\zeta_\gamma(b)$ для всех $a,b \in R$. Так как ξ_k – псевдонорма в кольце R_k, то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k(a_k\cdot b_k) \le \xi_k(a_k)\cdot\xi_k(b_k).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k\cdot b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma \cdot \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

Так как $\xi_k(b_k) \le max\left(\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \ldots, \xi_n(b_n)\right)$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma \cdot \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \cdot max\left(\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \ldots, \xi_n(b_n)\right).$$

Из предложения 2.4 следует, что

$$max\left(\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \ldots, \xi_n(b_n)\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma},$$

и мы получим

$$\zeta_\gamma(a\cdot b) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k\cdot b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma \cdot \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \cdot max\left(\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \ldots, \xi_n(b_n)\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(a_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k(b_k)\right)^\gamma\right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma(a)\cdot\zeta_\gamma(b).$$

Значит, функция ζ_γ действительно задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^{n} R_k$ для каждого $\gamma \in [1,+\infty)$.

Рассмотрим $\zeta_1(r) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(r_k)$. Из предложения 2.4 следует, что $\zeta_1(r) = \sup_{\gamma>1} \zeta_\gamma(r)$ для всех $r \in R$. Так как функции ζ_γ являются псевдонормами в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^{n} R_k$ для всех $\gamma \in (1,+\infty)$, то из предложения 3.3 следует, что функция ζ_1 также задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^{n} R_k$.

Рассмотрим $\zeta_{\infty}\ r\ = max\ \ \xi_k\ r_k\ \big|1 \le k \le n$. Из предложения 2.4 следует, что $\zeta_{\infty}\ r\ = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} \zeta_{\gamma}\ r$ для всех $r \in R$. Так как функции ζ_{γ} являются псевдонормами в кольце $R = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} R_k$ для всех $\gamma \in\ 1, +\infty$, то из предложения 3.3 следует, что функция ζ_{∞} также задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} R_k$.

Таким образом, каждая из функций ζ_{γ}, $1 \le \gamma \le \infty$, задает псевдонорму в кольце $R = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} R_k$. Предложение доказано.

3.8. Теорема. Пусть R_k, ξ_k и $\bar{R}_k, \bar{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – псевдонормированные кольца, $\varphi_k :\ R_k, \xi_k\ \to\ \bar{R}_k, \bar{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – полуизометрические изоморфизмы, $R = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} R_k =\ r =\ r_1, \ldots, r_n\ \big| r_k \in R_k, 1 \le k \le n$ и $\bar{R} = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} \bar{R}_k =\ \bar{r} =\ \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n\ \big| \bar{r}_k \in \bar{R}_k, 1 \le k \le n$ – прямые суммы колец R_k и $\bar{R}_k$ с псевдонормами ζ_{γ} и $\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$ соответственно, где $\zeta_{\gamma}\ r\ = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\ r_k\ ^{\gamma} \right)^{1/\gamma}$, $1 \le \gamma < \infty$, $\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \bar{r}\ = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\ \bar{r}_k\ ^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}$, $1 \le \bar{\gamma} < \infty$, $\zeta_{\infty}\ r\ = max\ \ \xi_k\ r_k\ \big| 1 \le k \le n$, $\bar{\zeta}_{\infty}\ r\ = max\ \ \bar{\xi}_k\ \bar{r}_k\ \big| 1 \le k \le n$. Тогда для любых $1 \le \gamma \le \bar{\gamma} \le \infty$ отображение $\Phi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \ldots \times \varphi_n$, $\Phi :\ R, \zeta_{\gamma}\ \to\ \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, действующее по правилу $\Phi\ \ r_1, r_2, \ldots, r_n\ =\ \varphi_1\ r_1\ , \varphi_2\ r_2\ , \ldots, \varphi_n\ r_n$, также является полуизометрическим изоморфизмом.

Доказательство.

Проверим выполнение критерия полуизометрического изоморфизма (см. теорему 1.4) для отображения $\Phi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \ldots \times \varphi_n$, $\Phi :\ R, \zeta_{\gamma}\ \to\ \bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, в случае $1 < \gamma \le \bar{\gamma} < \infty$.

Так как $\varphi_k :\ R_k, \xi_k\ \to\ \bar{R}_k, \bar{\xi}_k$ – полуизометрический изоморфизм, то для любых $a_k, b_k \in R_k$ выполнены неравенства

$$\bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ \ \le \xi_k\ \ a_k\ ;\ \xi_k\ \ a_k \cdot b_k\ \ \le \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ \ \cdot \xi_k\ \ b_k\ ;\ \xi_k\ \ b_k \cdot a_k\ \ \le \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ \ \cdot \xi_k\ \ b_k\ .$$

Тогда из этих неравенств с учетом предложения 2.4 для произвольных $a =\ a_1, a_2, \ldots, a_n\ \in R$ и $b =\ b_1, b_2, \ldots, b_n\ \in R$ имеем

$$\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ = \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ ^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \ a_k\ ^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \ a_k\ ^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \zeta_{\gamma}\ \ a\ .$$

Затем

$$\zeta_{\gamma}\ \ a \cdot b\ = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \ a_k \cdot b_k\ ^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ \ \cdot \xi_k\ \ b_k\ ^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le$$

$$\le max\ \ \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ \ \big| 1 \le k \le n\ \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \ b_k\ ^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\ \ \varphi_k\ \ a_k\ ^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\ \ b_k\ ^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ \ \cdot \zeta_{\gamma}\ \ b\ .$$

Аналогично доказываем неравенство $\zeta_\gamma\ \ b\cdot a\ \ \le \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ \ \ \cdot\zeta_\gamma\ \ b$.

Таким образом, для любых $a,b\in R$ выполнены неравенства

$$\zeta_\gamma\ \ a\cdot b\ \ \le\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ \ \ \cdot\zeta_\gamma\ \ b\ \ ;\ \zeta_\gamma\ \ b\cdot a\ \ \le\zeta_\gamma\ \ b\ \ \cdot\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ \ \ ;\ \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}\ \ \Phi\ \ a\ \ \ \le\zeta_\gamma\ \ a\ \ .$$

Значит, по теореме 1.4 отображение $\Phi=\varphi_1\times\varphi_2\times\ldots\times\varphi_n$ действительно является полуизометрическим изоморфизмом кольца R,ζ_γ в кольцо $\bar{R},\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$ при $1<\gamma\le\bar{\gamma}<\infty$.

Рассмотрим предельные случаи для γ и $\bar{\gamma}$.

Если $\gamma=1$ и $1<\bar{\gamma}<\infty$, то $\zeta_1=\sup\limits_{\gamma>1}\zeta_\gamma$ в силу предложения 2.4. Тогда из следствия 3.5_следует, что $\Phi:\ R,\zeta_1\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$ – полуизометрический изоморфизм.

При $\gamma=\bar{\gamma}=1$ согласно предложению 2.4 имеем $\zeta_1=\sup\limits_{\gamma>1}\zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_1=\sup\limits_{\bar{\gamma}>1}\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что $\Phi:\ R,\zeta_1\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_1$ – полуизометрический изоморфизм.

Если $\bar{\gamma}=\infty$ и $1<\gamma<\infty$, то из предложения 2.4 следует, что $\bar{\zeta}_\infty=\lim\limits_{\bar{\gamma}\to+\infty}\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из следствия 3.6 следует, что $\Phi:\ R,\zeta_\gamma\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_\infty$ – полуизометрический изоморфизм. Применяя следствие 3.5, получим, что при $\bar{\gamma}=\infty$ и $\gamma=1$ отображение $\Phi:\ R,\zeta_1\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_\infty$ также является полуизометрическим изоморфизмом.

Если $\gamma=\bar{\gamma}=\infty$, то согласно предложению 2.4 имеем $\zeta_\infty=\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_\infty=\lim\limits_{\bar{\gamma}\to+\infty}\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что $\Phi:\ R,\zeta_\infty\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_\infty$ – полуизометрический изоморфизм.

Таким образом, каковы бы ни были $1\le\gamma\le\bar{\gamma}\le\infty$, отображение $\Phi:\ R,\zeta_\gamma\ \ \to\ \bar{R},\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, где $R=\bigoplus\limits_{k=1}^{n}R_k$ и $\bar{R}=\bigoplus\limits_{k=1}^{n}\bar{R}_k$, является полуизометрическим изоморфизмом прямых сумм псевдонормированных колец. Теорема доказана.

Литература:

1. ALESCHENKO, S.A., ARNAUTOV, V.I. Quotient rings of pseudonormed rings. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei*, 2006, no.1(44), p.3-16.
2. ALESCHENKO, S.A. On some constructions of pseudonormed rings preserving semi-isometric isomorphisms. În: *5th International Algebraic Conference in Ukraine*, Odessa, 2005, p.15-16.
3. ARNAUTOV, V.I., GLAVATSKY, S.T., MIKHALEV, A.V. *Introduction to the theory of topological rings and modules*. Marcel Dekker, Inc. New York, 1996.
4. ХАРДИ, Г.Г., ЛИТТЛВУД, Дж.Е., ПОЛИА, Г. *Неравенства*. Москва, ИЛ, 1948.

Prezentat la 11.07.2013