

## ASUPRA CONVOLUȚIILOR DE TIP SERIE DE PUTERI ÎN CAZ DISCRET

Bogdan Gheorghe MUNTEANU

Universitatea de Stat din Moldova

Clasa distribuțiilor de tip serie de puteri reunește o gamă largă de distribuții discrete. Componenta acestei clase permite studiul distribuției duratei vieții unui sistem, caracterizată de o convoluție sumă de variabile aleatoare independente și identic distribuite (v.a.i.d.) de tip discret într-un număr aleator, în care acesta are o distribuție de tip serie de puteri. Obținem astfel funcția generatoare a duratei vieții, precum și media și dispersia acesteia.

**Cuvinte-cheie:** durată de viață, distribuție serie de puteri, convoluție, funcție generatoare.

## ON THE CONVOLUTIONS OF POWER SERIES TYPE IN THE DISCRETE CASE

The class of the power series distribution type brings together a wide range of discrete distributions. The composition of this class allows the study of lifetime distribution system, which is characterized by a convolution sum of independent and identically distributed random variables (i.i.d.r.v) of a discrete case in random number, it has a power series distribution type. Hence we obtain the generating function of the lifetime and its expectation and variation.

**Keywords:** lifetime, power series distribution, convolution, generating function.

## 1. Rezultate preliminare

Nevoia de a rezolva unele probleme din Teoria Fiabilității a condus la introducerea convoluției de tip serie de puteri. Primele rezultate referitoare la clasa distribuțiilor de tip serie de puteri se datorează lui Noak [8] și Kosambi [5], aceștia punând accent pe o parte din repartițiile de tip discret care fac parte din această clasă.

În această lucrare se prezintă în mod unitar o serie de convoluții de tip serie de puteri în caz discret.

Lucrarea este structurată astfel. În Secțiunea 2 este definită clasa repartițiilor de tip serie de puteri, fiind evidențiate elementele reprezentative ale acesteia, luându-se în considerare repartițiile discrete zero trunchiate (unde este cazul): binomială, Poisson, logaritmică, geometrică, Pascal și binomială negativă. De asemenea, sunt prezentate proprietățile acestei clase. În Secțiunea 3, cu scopul de a determina distribuția timpului de viață văzută ca o convoluție de tip serie de puteri, se prezintă modul în care se calculează funcția generatoare a convoluției de tip serie de puteri, precum și media și dispersia acesteia. În Secțiunea 4 sunt aduse câteva exemple de convoluții de serie de puteri în caz discret (convoluțiile geometrică și Pascal). Teoremele limită cu aplicații la fiabilitatea sistemelor sunt prezentate în Secțiunea 5. Concluziile din Secțiunea 6 încheie lucrarea.

## 2. Clasa PSD

În această secțiune vom folosi clasa de repartiții care a fost definită și introdusă pentru prima dată în lucrările lui Noak [8] și Kosambi [5] și utilizată pentru a studia convoluțiile similare în caz absolut continuu.

Fie  $Z$  o v.a. astfel încât  $P(Z \in \mathbb{N}) = 1$ .

**Definiția 2.1.** Spunem că variabila aleatoare  $Z$  are distribuție de tip serie de puteri dacă

$$P(Z = z) = \frac{a_z \theta^z}{A(\theta)}, \quad z = 1, 2, \dots; \theta \in (0, \tau); \tau > 0, \quad (2.1)$$

unde  $a_1, a_2, \dots$  este un șir de numere reale pozitive,  $\tau$  este un număr pozitiv mărginit superior de rază de convergență a seriei de puteri (funcția serie)  $A(\theta) = \sum_{z \geq 1} a_z \theta^z, \forall \theta \in (0, \tau)$ , iar  $\theta$  este parametrul putere al repartiției. Precizăm că seria de puteri  $A(\theta), \theta \in (0, \tau), \tau > 0$  este o funcție nenegativă și indefinit derivabilă.

Vom nota prin PSD ("power series distribution") clasa funcțiilor de repartiție de tip serie de puteri. Dacă variabila aleatoare  $Z$  are distribuția din relația (2.1), atunci notăm că  $Z \in PSD$ .

În lucrarea de față luăm în considerare drept distribuții din clasa PSD următoarele distribuții: binomială, Poisson, logaritmică, geometrică, Pascal și binomial negativă. Pentru fiecare repartiție evidențiem elementele caracteristice clasei PSD: șirul  $\{a_z\}_{z \geq 1}$ , funcția serie  $A(\theta)$  și exprimarea parametrului putere  $\theta$  în funcție de parametrul ce caracterizează fiecare distribuție în parte (*a se vedea* Tabelul 1.1.). Cel care a studiat această clasă (denumind-o *distribuție Laplaciană*, în termeni moderni, *exponențială liniară*) și care a pus accent pe aceste elemente caracteristice a fost Tweedie [9], iar Lehmann a definit clasa PSD ca fiind o distribuție exponențială liniară discretă [7].

**Consecința 2.1.**  $A(\theta)$  este o funcție indefinit derivabilă, iar valoarea medie și dispersia v.a.  $Z$  sunt caracterizate, respectiv, de formulele:

$$EZ = \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A'(\theta),$$

$$\text{Var } Z = \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A''(\theta) + \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A'(\theta) \left[ 1 - \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A'(\theta) \right].$$

**Demonstrație.** Observăm că  $EZ = \sum_{n \geq 1} n \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} = \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A'(\theta)$ , iar

$$EZ^2 = \sum_{n \geq 1} n^2 \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} = \sum_{n \geq 1} n(n-1) \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} + \sum_{n \geq 1} n \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} = \frac{\theta^2}{A(\theta)} \cdot A''(\theta) + \frac{\theta}{A(\theta)} \cdot A'(\theta).$$

□

**Tabelul 1.1.**

**Elementele reprezentative ale clasei PSD pentru diferite repartiții [4, 7, 9]**

Distribuția	$a_z$	$\theta$	$A(\theta)$	$\tau$
$\text{Binom}^*(n, p)$	$\binom{n}{z}$	$\frac{p}{1-p}$	$(1+\theta)^n - 1$	$\infty$
$\text{Poisson}^*(\lambda)$	$\frac{1}{z!}$	$\lambda$	$e^\theta - 1$	$\infty$
$\text{Log}(p)$	$\frac{1}{z}$	$p$	$-\ln(1-\theta)$	1
$\text{Geom}^*(p)$	1	$1-p$	$\frac{\theta}{1-\theta}$	1
$\text{Pascal}(k, p)$	$\binom{z-1}{k-1}$	$1-p$	$\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$	1
$\text{BN}^*(k, p)$	$\binom{z+k-1}{z}$	$p$	$(1-\theta)^{-k} - 1$	1

Un rezultat foarte important, care subliniază faptul că familia distribuțiilor de tip PSD este închisă în raport cu operația convoluției, este dat de următoarea propoziție:

**Propoziția 2.1.** Dacă  $Z_1, Z_2, \dots$  sunt v.a.i.i.d., cu distribuția din clasa PSD (relația (2.1)), atunci v.a.  $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m, m \geq 1$  are distribuție de tip PSD.

**Demonstrație.** Vom justifica acest rezultat folosind funcția generatoare. Fie  $\{Z_i\}_{i=1, \dots, m}$  un șir de v.a.i.i.d. Funcția generatoare a unei v.a.  $Z_i \in \text{PSD}, i = \overline{1, m}$  este următoarea:

$$\Psi_{Z_i}(w) = \sum_{z \geq 1} P(Z_i = z) \cdot w^z = \frac{1}{A(\theta)} \sum_{z \geq 1} a_z \cdot \langle w \theta \rangle^z = \frac{A \langle w \theta \rangle}{A(\theta)}.$$

În aceste condiții funcția generatoare v.a.  $Z$  este:

$$\Psi_Z(w) = \Psi_{Z_1+Z_2+\dots+Z_m}(w) = \prod_{i=1}^m \Psi_{Z_i}(w) = \prod_{i=1}^m \frac{A \langle w \theta \rangle}{A(\theta)} = \left( \frac{A \langle w \theta \rangle}{A(\theta)} \right)^m = \frac{A_Z \langle w \theta \rangle}{A_Z(\theta)}.$$

Din ultima relație rezultă că v.a.  $Z \in PSD$ ,  $Z = \sum_{i=1}^m Z_i$  cu  $A_Z \langle \theta \rangle = \langle A \langle \theta \rangle \rangle^m$ .

□

**Remarca 2.1.** Propoziția 2.1 rămâne valabilă chiar dacă renunțăm la condiția că v.a.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ ,  $m \geq 1$  sunt v.a. identic distribuite. Demonstrația se poate face în mod asemănător. De asemenea, acest rezultat arată că familia distribuțiilor de tip PSD este închisă în raport cu operația convoluției.

**Consecința 2.1.** Dacă  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_m \in PSD$  și  $\langle N_i \rangle_{i=1, \dots, m}$  sunt v.a.i.i.d.,  $N_i \in PSD$ ,  $i = \overline{1, m}$  cu  $P \langle N_i = n \rangle = \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\theta \in \langle \tau \rangle$ ;  $\tau > 0$ , atunci v.a.  $N \in PSD$  are repartiția  $P \langle N = n^* \rangle = \frac{a_{n^*} \theta^{n^*}}{A(\theta)}$ ,  $n^* = 1, 2, \dots$ ;  $\theta \in \langle \tau \rangle$ ;  $\tau > 0$ , unde  $A_N \langle \theta \rangle = \langle A \langle \theta \rangle \rangle^m$ .

**Remarca 2.2.** Propoziția 2.1 arată că apartenența repartiției Pascal la clasa PSD este o consecință a unei proprietăți generale a convoluției de tip PSD în caz discret. Aceasta se vede din următorul exemplu:

Exemplu: Dacă  $N_i \sim Geom^*(p) \in PSD$ ,  $p > 0$ ,  $i = \overline{1, k}$   $\xrightarrow{cf. Tabel 1.1} A(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$ ;

$N = N_1 + N_2 + \dots + N_k \in PSD$ ,  $N \sim Pascal(k, p) \xrightarrow{cf. Tabel 1.1} A_N(\theta) = \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right)^k = \langle A(\theta) \rangle^k$ .

### 3. Convoluția de tip PSD în caz discret

În această secțiune ne propunem să determinăm distribuția v.a.

$Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \in PSD$ , atunci când  $\langle X_i \rangle_{i=1, \dots, N}$  sunt v.a.i.i.d.,  $X_i \in PSD$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $N \in PSD$  și cunoaștem funcțiile generatoare  $\psi_{X_i}(w) = \psi(w)$  și  $\Psi_N(w) = \sum_{n \geq 1} P(N = n) \cdot w^n$  ale v.a.  $\langle X_i \rangle_{i=1, \dots, N}$ , respectiv  $N$ .

**Teorema 3.1.** Dacă v.a.  $N \in PSD$  are funcția generatoare  $\Psi_N(w) = \sum_{n \geq 1} P(N = n) \cdot w^n$ , iar v.a.  $\langle X_i \rangle_{i=1, \dots, N}$  fiind i.i.d.,  $X_i \in PSD$ ,  $P \langle X_i \in \mathbb{N} \rangle = 1$ , au funcția generatoare cunoscută  $\psi_{X_i}(w) = \psi(w)$ ,  $\forall i \geq 1$ , atunci v.a.  $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \in PSD$  și are funcția generatoare:

$$\psi_{Y_N}(w) = \psi_N(\psi(w)), \forall w \in D_a, \quad (3.1)$$

unde  $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

**Demonstrație.** Cum v.a.  $X_i \in \mathbb{N}$ , rezultă că și v.a.  $Y_N \in \mathbb{N}$ . Prin urmare, ținând cont de definiția, proprietățile funcției generatoare și formula probabilității totale, obținem următoarele:

$$\begin{aligned} \Psi_{Y_N}(w) &= \sum_{z \geq 1} P(Y_N = z) \cdot w^z = \sum_{z \geq 1} \left[ \sum_{n \geq 1} P(Y_N = z | N = n) \cdot P(N = n) \right] \cdot w^z = \\ &= \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{z \geq 1} P(Y_N = z | N = n) \cdot w^z \right] \cdot P(N = n) = \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{z \geq 1} P(Y_n = z) \cdot w^z \right] \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \left[ \sum_{z \geq 1} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = z) \cdot w^z \right] \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \psi_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}(w) \cdot P(N = n) = \sum_{n \geq 1} \psi(w)^n \cdot P(N = n) = \psi_N(\psi(w)) \end{aligned}$$

□

**Remarca 3.1.** Funcția generatoare a v.a.  $N \in PSD$

$$P(N = n) = \frac{a_n \theta^n}{A_N(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \theta \in \mathbb{Q}, \tau; \tau > 0,$$

poate fi rescrisă astfel:

$$\Psi_N(w) = \sum_{n \geq 1} P(N = n) \cdot w^n = \frac{1}{A_N(\theta)} \sum_{n \geq 1} a_n \cdot (\psi \theta)^n = \frac{A_N(\psi \theta)}{A_N(\theta)} \quad (3.2)$$

În aceste condiții, relația (3.1) devine:

$$\Psi_{Y_N}(w) = \frac{A_N(\psi \psi(w))}{A_N(\theta)}, \quad (3.3)$$

unde  $\psi(w)$  este funcția generatoare a v.a.  $X_i, i \geq 1$ .

Este cunoscut, după Feller [2], faptul că dacă  $X$  este o v.a. de tip discret,  $E|X_i|^m = E|X|^m < \infty, \forall i \geq 1, m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ , atunci funcția generatoare corespunzătoare este  $\Psi_X(w) = \sum_{n \geq 1} P(X = n) \cdot w^n = \sum_{n \geq 1} p_n \cdot w^n$  și are derivata

de ordinul întâi  $\Psi'(w) = \sum_{n \geq 1} n p_n \cdot w^{n-1}$ .

Atunci

$$\Psi'(1) = \sum_{n \geq 1} n p_n = EX, \quad (3.4)$$

iar

$$\text{Var } X = \Psi''(1) + \Psi'(1) - \Psi'^2(1) \quad (3.5)$$

Ținând cont de cele expuse anterior, putem formula următoarea consecință.

**Consecința 3.1.** În condițiile de mai sus, media și dispersia v.a.  $Y_N$  sunt caracterizate de următoarele relații:

$$EY_N = EN \cdot EX \quad (3.6)$$

și

$$\text{Var } Y_N = EX^2 \cdot \text{Var } N + EN \cdot \text{Var } X \quad (3.7)$$

**Consecința 3.2.** Dacă  $\{N_j\}_{j=1,k}$  și  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  sunt v.a.i., unde  $N_j \in PSD$

$$P\{N_j = n\} = \frac{a_n^{(j)} \theta^n}{A_{N_j}(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \theta \in (0, \tau); \quad \tau > 0, \quad N = N_1 + N_2 + \dots + N_k \in PSD, \quad k \geq 1, \quad \text{iar}$$

$\{X_i\}_{i \geq 1}$  sunt v.a.i.i.d.,  $X_i \in PSD$ ,  $P\{X_i \in \mathbb{N}\} = 1$ , cu funcția generatoare  $\psi_{X_i}(w) = \psi(w)$  cunoscută oricare ar fi  $i \geq 1$ , atunci v.a.  $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \in PSD$  și funcția ei generatoare

$$\Psi_{Y_N}(w) = \prod_{j=1}^k \psi_{N_j}(\psi(w)) = \prod_{j=1}^k \frac{A_{N_j}(\psi(w))}{A_{N_j}(\theta)}, \quad (3.8)$$

$$\text{unde } \psi_{N_j}(w) = \sum_{n \geq 1} P(N_j = n) \cdot w^n.$$

**Consecința 3.3.** În condițiile Consecinței 3.2 au loc relațiile  $EY_N = \sum_{j=1}^k EY_{N_j}$  și  $\text{Var}Y_N = \sum_{j=1}^k \text{Var}Y_{N_j}$ .

#### 4. Ilustrarea unor exemple privind convoluția de tip PSD în caz discret

Vom prezenta câteva convoluții de tip PSD cu repartiția componentelor din sumă tot de tip PSD (a se vedea Tabelul 1.1.). Rezultatele prezentate în continuare sunt exprimate în termenii funcției generatoare.

Rezultatele sunt concentrate pe convoluțiile geometrică și Pascal. La baza lor stau Teorema 3.1 și Consecințele 3.1-3.3, prin prisma cărora sunt determinate funcția generatoare, media și dispersia (sau chiar repartiția în mod explicit) a repartiției duratei vieții  $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  în funcție de repartițiile v.a.  $N \in PSD$  și v.a.  $X_i \in PSD, i \geq 1$ .

##### 4.1. Convoluția geometrică

Considerăm convoluția geometrică de parametru  $p \in (0, 1)$  în funcție de repartiția v.a.  $X_i \in PSD, i \geq 1$

de parametrii  $p^* \in (0, 1)$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > 0$  și  $\alpha^* = -\frac{1}{\ln(1-p^*)}$ .

- convoluția geometrică a repartiției geometrice:

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{pp^* w}{1 - (1 - pp^*)w}, \quad EY_N = \frac{1}{pp^*}, \quad \text{Var}Y_N = \frac{1 - pp^*}{(pp^*)^2};$$

- convoluția geometrică a repartiției Pascal:

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p(p^* w)^k}{1 - (1 - p^*)w^k - (1 - p)(p^* w)^k}, \quad EY_N = \frac{k}{pp^*},$$

$$\text{Var}Y_N = \frac{k^2(1 - p) + kp(1 - p^*)}{(pp^*)^2};$$

- convoluția geometrică a repartiției Poisson:

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p(e^{\lambda w} - 1)}{e^{\lambda} - e^{\lambda w}(1 - p) - p}, \quad EY_N = \frac{\lambda}{p(1 - e^{-\lambda})},$$

$$\text{Var}Y_N = \frac{(1 - p)\lambda^2 + p(1 - e^{-\lambda})\lambda^2 e^{-\lambda}}{p^2(1 - e^{-\lambda})^2};$$

- convoluția geometrică a repartiției binomiale:

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p \left[ (1-p^*) + p^* w \right]^n - (1-p^*)^n}{1 - p^* (1-p^*)^n - (1-p) \left[ (1-p^*) + p^* w \right]^n}, \quad EY_N = \frac{np^*}{p \left[ (1-p^*)^n \right]},$$

$$\text{Var}Y_N = \frac{np^* \left[ (1-p) + p(1-p^*) - npp^*(1-p^*)^n - p(1-p^*)^{n+1} \right]}{p^2 \left[ (1-p^*)^n \right]^2};$$

- **convoluția geometrică a repartiției logaritmice:**

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p \ln \left[ (1-p^*) + p^* w \right]^{\alpha^*}}{1 - (1-p) \ln \left[ (1-p^*) + p^* w \right]^{\alpha^*}}, \quad EY_N = \frac{\alpha^* p^*}{p(1-p^*)},$$

$$\text{Var}Y_N = \frac{(1-2p) \left[ \alpha^* p^* \right]^2 + \alpha^* pp^*}{p^2 (1-p^*)^2}.$$

În conformitate cu rezultatele obținute la convoluția geometrică a repartiției geometrice, putem formula următorul rezultat:

**Propoziția 4.1.** Dacă v.a.  $N \sim \text{Geom}^*(p)$ ,  $p \in (0,1)$ ,  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  sunt v.a.i.i.d.  $\text{Geom}^*(p^*)$ ,  $p^* \in (0,1)$ , v.a.  $N$  și  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  fiind independente, atunci v.a.  $Y_N \sim \text{Geom}^*(pp^*)$ .

#### 4.2. Convoluția Pascal

Convoluțiile Pascal au la bază presupunerea că  $N \sim \text{Pascal}(k, p)$ ,  $p \in (0,1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . În acest caz, se observă că v.a.  $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  are aceeași distribuție ca și v.a.  $Y_{N_1} + Y_{N_2} + \dots + Y_{N_k}$ , unde  $\{N_j\}_{j=1,k}$  sunt v.a.i.i.d.  $\text{Geom}^*(p)$ ,  $p \in (0,1)$ , iar  $Y_{N_j} \sim X_1 + X_2 + \dots + X_{N_j}$  deoarece v.a.  $N_1 + N_2 + \dots + N_k \sim \text{Pascal}(k, p)$ . Prin urmare, folosind Consecințele 3.2 și 3.3, deducem că funcția generatoare  $\Psi_{Y_N}(w) = \prod_{j=1}^k \psi_{Y_{N_j}}(w)$ , unde  $\psi_{Y_{N_j}}(w) = \frac{p\psi(w)}{1 - (1-p)\psi(w)}$ ,  $\forall j = \overline{1,k}$ ,  $\psi(w)$  fiind funcția generatoare a repartiției v.a.  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ .

Așadar,  $\Psi_{Y_N}(w) = \left( \frac{p\psi(w)}{1 - (1-p)\psi(w)} \right)^k$ , iar  $EY_N = \sum_{j=1}^k EY_{N_j}$  și  $\text{Var}Y_N = \sum_{j=1}^k \text{Var}Y_{N_j}$ .

Luând în calcul rezultatele obținute în cadrul convoluției geometrice, obținem următoarele:

- **convoluția Pascal a repartiției geometrice**

$$\psi_{Y_N}(w) = \left[ \frac{pp^* w}{1 - (1 - pp^*)w} \right]^k, \quad EY_N = \frac{k}{pp^*}, \quad \text{Var}Y_N = \frac{k(1 - pp^*)}{(pp^*)^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției Pascal**

$$\psi_{Y_N}(w) = \left[ \frac{p \left[ (1-p^*) + p^* w \right]^{k^*}}{\left[ (1-p^*)w \right]^{k^*} - (1-p)(p^* w)^{k^*}} \right]^k, \quad EY_N = \frac{kk^*}{pp^*},$$

$$\text{Var}Y_N = k \frac{\left[ (1-p) + k^* p(1-p^*) \right]}{(pp^*)^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției Poisson**

$$\psi_{Y_N}(w) = \left[ \frac{p(e^{\lambda w} - 1)}{e^{\lambda} - e^{\lambda w}(1-p) - p} \right]^k, \quad EY_N = \frac{k\lambda}{p(1 - e^{-\lambda})},$$

$$\text{Var}Y_N = k \frac{(1-p)\lambda^2 + p(1 - e^{-\lambda})\lambda^2 e^{-\lambda}}{p^2(1 - e^{-\lambda})^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției binomiale**

$$\psi_{Y_N}(w) = \left[ \frac{p[(1-p^*) + p^*w]^n - (1-p^*)^n}{1-p^*(1-p^*)^n - (1-p)[(1-p^*) + p^*w]^n} \right]^k, \quad EY_N = \frac{kn p^*}{p[1 - (1-p^*)^n]},$$

$$\text{Var}Y_N = \frac{kn p^* [(1-p) + p(1-p^*) - n p p^* (1-p^*)^n - p(1-p^*)^{n+1}]}{p^2 [1 - (1-p^*)^n]^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției logaritmice**

$$\psi_{Y_N}(w) = \left[ \frac{p \ln[-p^* w]^{-\alpha^*}}{1 - (1-p) \ln[-p^* w]^{-\alpha^*}} \right]^k, \quad EY_N = \frac{k \alpha^* p^*}{p(1-p^*)},$$

$$\text{Var}Y_N = k \frac{(1-2p)\alpha^* p^{*2} + \alpha^* p p^*}{p^2 (1-p^*)^2}.$$

Prin analogie cu Propoziția 4.1 și conform convoluției geometrice, deducem:

**Propoziția 4.2.** Dacă v.a.  $N \sim \text{Pascal}(k, p)$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , iar  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  sunt v.a.i.i.d.  $\text{Geom}^*(p^*)$ ,  $p^* \in (0, 1)$ ,  $N$  și  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  reciproc independente, atunci v.a.  $Y_N \sim \text{Pascal}(k, pp^*)$ .

## 5. Teoreme limită pentru convoluții de tip PSD în caz discret

Date fiind convoluțiile geometrică și Pascal și ținând cont de proprietățile clasei PSD, obținem noi teoreme limită în care sunt implicate convoluțiile de tip PSD în caz discret.

Se impun câteva rezultate intermediare.

**Lema 5.1.** ([3]) Dacă  $N \sim \text{Geom}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , atunci  $pN \Rightarrow \text{Exp}(1)$  dacă  $p \rightarrow 0$ .

**Propoziția 5.1.** ([6]) Dacă  $N \sim \text{Pascal}(k, p)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in (0, 1)$ , atunci  $pN \underset{p \rightarrow 0}{\Rightarrow} Z \sim \text{Erlang}(k, 1)$ .

În condițiile Propozițiilor 4.1, 4.2, 5.1 și ale Lemei 5.1, putem formula următoarele teoreme limită:

**Teorema 4.1.** Dacă  $Y_N \sim \text{Geom}^*(pp^*)$ ,  $p, p^* \in (0, 1)$ , atunci v.a.  $pp^* Y_N \underset{p \rightarrow 0}{\Rightarrow} \text{Exp}(1)$ .

**Teorema 4.2.** Dacă  $Y_N \sim \text{Pascal}(k, pp^*)$ ,  $p, p^* \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , atunci v.a.  $pp^* Y_N \underset{p \rightarrow 0}{\Rightarrow} \text{Erlang}(k, 1)$ .

Justificarea acestor teoreme rezultă imediat dacă ținem cont de Lema 5.1, respectiv de Propoziția 5.1. Observăm că Teorema 4.2. completează Teorema lui Brown [1], generalizată de noi în [6], cuprinzând și cazul discret când componentele convoluției sunt v.a.i.i.d. geometric distribuite.

## 6. Concluzii

Abordarea în mod unitar a clasei întregi de convoluții de tip PSD ne-a permis să formulăm și să demonstrăm noi teoreme limită cu aplicații la fiabilitatea sistemelor, mai exact – la determinarea distribuției duratei vieții atunci când aceasta se exprimă ca o sumă de v.a.i.i.d. geometric în număr aleator (cu distribuție geometrică, respectiv Pascal). Distribuțiile limită în acest caz sunt exponențială, respectiv Erlang.

**Referințe:**

1. BROWN, M. Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions. In: *The Annals of Probability*, 1990, vol.18, no.3, p.1388-1402.
2. FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.1. New York: John Wiley & Sons, 1965.
3. FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.2. New York: John Wiley & Sons, 1971.
4. JOHNSON, N.L., KEMP, A.W. and KOTZ, S. *Univariate Discrete Distribution*. New Jersey, 2005.
5. KOSAMBI, D.D. Characteristic properties of series distribution. In: *Proceedings of the National Institute for Science*, India, 1949, no.15, p.109-113.
6. LEAHU, A., MUNTEANU, B.Gh. and CATARANCIUC, S. Erlang Approximation on Pascal Convolution in Reliability System. In: *The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM XX*, Chișinău, 2012, p.146-147.
7. LEHMANN, E.L. *Testing Statistical Hypotheses* (second edition). New York: Wiley, 1986.
8. NOAK, A. A class of random variables with discrete distribution. In: *Annals of Mathematical Statistics*, 1950, no.21, p.127-132.
9. TWEEDIE, M.C.K. Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1947), p.41-49.

*Prezentat la 12.09.2013*