

CZU: 533.9 + 532

DOI: <http://doi.org/10.5281/zenodo.3978124>**ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ***Александр КЛЮКАНОВ, Денис НИКА**Молдавский государственный университет*

Найдено самосогласованное решение для продольной диэлектрической функции  $\varepsilon(q, \omega)$  методом инфинитезимальных возмущений с учетом корреляций в электронной Ферми-жидкости с кулоновским взаимодействием произвольной силы. Показано, что затухание длинноволновых плазменных колебаний обусловлено рассеянием плазмонов на электронах.

**Ключевые слова:** Ферми-жидкость, продольная диэлектрическая функция, закон дисперсии, затухание плазменных колебаний.

**LONGITUDINAL DIELECTRIC FUNCTION OF THE FERMI LIQUID**

A self-consistent solution was found for the longitudinal dielectric function by the method of infinitesimal perturbations, taking into account correlations in the electron Fermi liquid with the coulombian interaction of arbitrary strength. It was shown that the damping of long-wave plasmons is due to their scattering by electrons.

**Keywords:** Fermi liquid. Longitudinal dielectric function. Dispersion law. Damping of plasma oscillations.

**FUNȚIA DIELECTRICĂ LONGITUDINALĂ DE LICHID FERMI**

S-a găsit o soluție autoconsistentă pentru funcția dielectrică longitudinală prin metoda perturbațiilor infinitezimale, fiind luate în considerare corelațiile din lichidul Fermi cu electroni cu interacțiunea coulombiană a puterii arbitrare. S-a demonstrat că atenuarea plasmonilor cu undă lungă se datorează împrăștierii acestora de electroni.

**Cuvinte-cheie:** lichid Fermi, funcție dielectrică longitudinală, legea dispersiei, atenuarea oscilațiilor plasmatică.

**Введение**

Электронная плазма является объектом пристального внимания в связи с проблемой квантового компьютера. Интерес к магнонам, плазмонам и фононам обусловлен их ролью в плазмонике и спинтронике. В последнее время появляется все больше работ о плазмонной и фононной спинтронике, посвященных исследованиям магнонов, фононов, плазмонов и их взаимодействий [1-4]. Связь магнонов с плазмонами, в частности, приводит к возбуждению магнонов электромагнитным полем плазменных колебаний [4] и, таким образом, позволяет управлять одной волной с помощью другой. Теория плазменных колебаний разработана детально, но, тем не менее, вопрос сильной связи требует дальнейших исследований. В приближении хаотических фаз длинноволновые плазменные волны не затухают. В данной работе мы рассчитаем продольную диэлектрической функцию  $\varepsilon(q, \omega)$  Ферми-жидкости, не предполагая кулоновское взаимодействие слабым, и определим дисперсию и затухание плазмонов.

**Общие уравнения**

Согласно теории Ландау, состояния Ферми-жидкости могут быть описаны одночастичным гамильтонианом квазичастиц  $H_Q = \sum_k E_k a_k^+ a_k$ , который мы используем в качестве самосогласованного решения по методу Хартри-Фока (HF). Здесь  $k$  символизирует набор квантовых чисел квазичастиц,  $E_k$  - неопределенный множитель Лагранжа, подлежащий определению в рамках расчета продольной диэлектрической функции  $\varepsilon(q, \omega)$ . Суммируя полученные с помощью метода инфинитезимальных возмущений  $V(q) = V_q^e + V_{-q}^e$  в работе [5] результаты и обозначения, для двухчастичной функции Грина находим уравнение

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 - \tilde{G}(q, \omega), \quad \tilde{G} = V_q \sum_{lm} \alpha_{lm} \langle [p_{-q}, a_l^+ a_m] \rangle e^{-iqr} (e_{lm}^{-iqr} + \Xi_{lm}^C)^{-1}. \quad (1)$$

Кулоновское взаимодействие не только определяет спектр квазичастиц, но также и вид самой функции Грина (1). Обмен и корреляции заряда электронной плазмы твердого тела приводят для функции  $\Xi_{lm}^C$  к следующему результату [5]:

$$\begin{aligned} \Xi_{lm}^C = \sum_{q'} V_{q'} \left( \langle \rho_{q'} \rangle (I / \varepsilon(q', \omega + \omega_{lm}) - I / \varepsilon(q', 0)) (\alpha_{ll'} e_{l'm'}^{iq'r} - e_{ll'}^{iq'r} \alpha_{l'm'}) + \sum_{l''m''} (P_{l''m''}^-(\omega_{l''m''}) e_{l''m''}^{l'm} \alpha_{l'l''} - P_{l''m''}^+(\omega_{l''m''}) e_{l''m''}^{l'm} \alpha_{l'l''} + \right. \\ \left. + (P_{l''m''}^+(\omega + \omega_{l''m''}) - P_{l''m''}^+(\omega_{l''m''})) \alpha_{l'l''} e_{l''m''}^{l'm} - (P_{l''m''}^-(\omega + \omega_{l''m''}) - P_{l''m''}^-(\omega_{l''m''})) e_{l''m''}^{l'm} \alpha_{l'l''} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

В приближении HF, то есть в пределе  $\varepsilon(q', \omega + \omega_{lm}) = I$ , функция  $\Xi_{lm}^C$  переходит в функцию  $\Xi_{lm}$  (формула (7) из работы [5]). Уравнение для  $\varepsilon(q, \omega)$  (1) является интегральным, так как функция  $\Xi_{lm}^C$ , определяющая полюса диэлектрической функции, сама зависит от  $\varepsilon(q', \omega)$  под знаком суммы по  $q'$  через  $P_{l''m''}^{\pm}(\Omega^{\pm})$ . Экранировка на смещенных частотах характеризуется функциями  $P_{l''m''}^{\pm}(\omega + \omega_{lm})$  [5,6], имеющими следующий вид:

$$P_{l''m''}^{\pm}(\Omega^{\pm}) = P_{l''m''} / \varepsilon(q', \Omega^{\pm}) - \delta_{l''m''} g_{\pm}(q', \Omega^{\pm}), \Omega^{+} = \omega + \omega_{l''m''}, \Omega^{-} = \omega + \omega_{l''m''}. \quad (3)$$

Результаты работ, обзор которых изложен в монографии [7], могут быть получены из уравнений (1-3). Теория Бома и Пайнса [8] соответствует пределу  $\Xi_{lm} = 0$  и усреднению на матрице плотности свободных электронов. В пределе слабой связи, если в разложении по  $\Xi_{lm}$  ограничиться поправками первого порядка, среднее значение  $P_{l''m''}$  вычислить в приближении квазичастиц Ферми-газа  $P_{l''m''} = n_{l''} \delta_{l''m''}$  и приближенно учесть обменные поправки для спектра, получим результаты работы [9]. Обзор предшествующих работ можно найти в [7,9].

### Энергетический спектр электронов

Спектр энергий квазичастиц является решением системы усредненных на равновесной матрице плотности уравнений Хартри-Фока с учетом экранировки [3,5,6].

$$\sum_m (h_{lm}^C - E_l \delta_{lm}) \alpha_{mk} = 0, h_{lm}^C = h_{lm} - \sum_{q'} V_{q'} \left( \langle \rho_{q'} \rangle e_{lm}^{iq'r} / \varepsilon(q', 0) + \sum_{l''m''} P_{l''m''}^+(\omega_{l''m''}) e_{l''m''}^{l'm}(q') \right). \quad (4)$$

Квантовомеханические HF уравнения могут быть получены из уравнений (4), только если положить  $\varepsilon(q', \Omega) = I$  и снять усреднение на равновесной матрице плотности. Тем не менее, модельный гамильтониан метода эффективной массы с учетом экранировки ( $\varepsilon(q', \Omega) \neq I$ ) может быть обоснован только уравнениями (4). Согласно (4), частота перехода равна  $\hbar\omega_{lm} = \sum_{l'} (h_{ll'}^C \alpha_{l'm} - \alpha_{ll'} h_{l'm}^C) / \alpha_{lm}$ . Это позволяет преобразовать ядро функции Грина (1) к виду

$$(\omega + \omega_{lm}) (\Xi_{lm}^C + e_{lm}^{-iq'r}) = e_{lm}^{-iq'r} (\omega + (h_{ll} - h_{mm}) / \hbar) + (\omega + \omega_{lm}) \sum_{lm} (\Omega), \quad (5)$$

$$\sum_{lm} (\Omega) = \sum_{q'} V_{q'} \left( \frac{\langle \rho_{q'} \rangle}{\varepsilon(q', \omega + \omega_{lm})} (\alpha_{ll'} e_{l'm}^{iq'r} - e_{ll'}^{iq'r} \alpha_{l'm}) + \sum_{l''m''} (P_{l''m''}^+(\Omega^+) (\alpha_{ll''} e_{l''m''}^{l'm} - e_{ll''}^{l'm} \alpha_{l'm''}) + P_{l''m''}^-(\Omega^-) (e_{l''m''}^{l'm} \alpha_{l'l''} - e_{l''m''}^{l'm} \alpha_{l'l''})) \right).$$

Матрица возмущения  $h_{lm}^C$  компенсирует часть функции  $\Xi_{lm}^C$ . Зонная структура учитывается путем выбора базиса вторичного квантования в виде функций Блоха или Ванье. В однозонном приближении матричные элементы вычислим в длинноволновом приближении  $e_{lm}^{iq'r} = \delta_{k_l, k_m + q}$ . Базисом вторичного квантования без учета процессов переброса в пределе  $q \rightarrow 0$  фактически являются плоские волны. Используя модель свободных электронов, находим для продольной диэлектрической функции  $\varepsilon(q, \omega)$  уравнение

$$\varepsilon(q, \omega) = I - 2 \sum_k \frac{V_q (P_k - P_{k+q})}{\hbar (\omega + \omega_{kk+q}^f + (\omega + \omega_{kk+q}) \sum_{kk+q} (\Omega) + i\delta)}, \quad \omega_{kk+q}^f = \omega_k^f - \omega_{k+q}^f, \omega_k^f = \hbar k^2 / 2m. \quad (6)$$

Частоты элементарных возбуждений системы определяются полюсами  $\varepsilon(q, \omega)$  (6). С учетом статической экранировки энергия электрона в единицах энергии Ферми имеет вид

$$\omega_k = k^2 - \frac{2}{\pi a_B k_F} \left\{ 1 + \frac{1 - k^2 + k_c^2}{4k} \ln \frac{(1+k)^2 + k_c^2}{(1-k)^2 + k_c^2} + (1+k)^2 - k_c \left( \arctg \frac{1-k}{k_c} + \arctg \frac{1+k}{k_c} \right) \right\}, \quad (7)$$

Здесь  $k_c = 0.815 \sqrt{r_s}$ . Константа связи  $r_s = \frac{1}{a_B k_F} \cdot \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{1/3}$  выражается через борковский радиус и

импульс Ферми. Функции распределения Ферми-жидкости  $P_k, P_{k+q}$  в согласии с теорией Ландау также зависят от  $\varepsilon(q, \omega)$  [6]. Результаты работ [8,9] могут быть получены без учета экранировки из уравнения (7) в пределе  $k_c = 0$

### Затухание плазменных колебаний

Функцию  $\sum_{lm}(\Omega)$ , являющуюся ядром двухчастотной функции Грина (1), вычислим на базе плоских волн. В результате получим следующее уравнение:

$$\hbar(\omega + \omega_{kk+q}) \sum_{kk+q}(\Omega) = \sum_{q'} V_{q'} \frac{\omega_{k-q'k+q-q'} - \omega_{kk+q}}{\omega + \omega_{k-q'k+q-q'}} \left( P_{k+q-q'}^+(\omega + \omega_{kk+q-q'}) - P_{k-q'}^-(\omega + \omega_{k-q'k+q}) \right). \quad (8)$$

Используя флуктуационно-диссипационную теорему, для функций  $g^\pm$  (3) получим уравнение

$$1/\varepsilon(q', \Omega^\pm) = 1 + g_+(q', \Omega^\pm) + g_-(q', \Omega^\pm), \quad g_\pm(q', \Omega^\pm) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\Omega^\pm \mp v} (n(v) + 1) \text{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^*(q', v)} \right\}. \quad (9)$$

Мнимая часть  $\varepsilon^{-1}(q, \omega)$  позволяет определить закон дисперсии высокочастотных плазмонов в металлах с учетом обменных поправок [7,9]. Рассмотрим  $\varepsilon(q, \omega)$  в области частот  $\omega \cong \omega_p$ . В качестве первого шага самосогласования используем диэлектрическую функцию в приближении хаотических фаз [7]. В области частот вблизи плазмонного резонанса интегрирование по частотам в уравнении (9) легко выполняется и мы приходим к результату

$$\varepsilon(v) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(v + i\delta)^2}, \quad \text{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^*(v)} \right\} = \frac{\pi}{2} \omega_p (\delta(v - \omega_p) - \delta(v + \omega_p)), \quad g_\pm(q', \Omega^\pm) = \pm \frac{\omega_p}{2} \frac{1}{\Omega^\pm \mp \omega_p}. \quad (10)$$

При достаточно низких температурах, когда число плазмонов пренебрежимо мало,  $n(\omega_p) \rightarrow 0$ , для продольной диэлектрической функции (6) с учетом интегралов (10) находим уравнение

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 - 2 \frac{V_q}{\hbar \omega} \sum_k \frac{(P_{k-q/2} - P_{k+q/2})}{1 - \Omega(\vec{q}, \vec{k})}, \quad \Omega = 2 \frac{\omega_F}{\omega} (\vec{q} \cdot \vec{k}) + \sum_{q'} \frac{V_{q'-k}}{\hbar \omega} \frac{\omega_{q'+q/2, q'-q/2} - \omega_{k+q/2, k-q/2}}{\omega - \omega_{q'+q/2, q'-q/2}} \{ n_{q'+q/2} - n_{q'-q/2} - F(\vec{q} \cdot \vec{q}') \}$$

$$F(\vec{q} \cdot \vec{q}') = \frac{\omega_p}{2} \left( \frac{1 - n_{q'+q/2}}{D_{k-q/2, q'+q/2}^-} + \frac{1 - n_{q'-q/2}}{D_{q'-q/2, k+q/2}^+} + \frac{n_{q'+q/2}}{D_{k-q/2, q'+q/2}^+} + \frac{n_{q'-q/2}}{D_{q'-q/2, k+q/2}^-} \right), \quad D_{k-q/2, q'+q/2}^\pm = \omega + \omega_{k-q/2, q'+q/2} \pm \omega_p + i\gamma. \quad (11)$$

Основной вклад в функцию  $\Omega(\vec{q}, \vec{k})$ , согласно (11), определяется нулями функций  $D_{k-q/2, q'+q/2}^\pm$ . В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  получим дельтовидные пики, определяющие закон сохранения энергии при рассеянии. В области частот  $\omega \cong \omega_p$  затухание плазмонов и их частота определяются двухплазмонными процессами резонансного рассеяния плазмона на электроны, когда в результате рассеяния электрон вблизи границы Ферми переходит из состояния  $\vec{k}$  в состояние  $\vec{k} + \vec{q} + \vec{q}'$ , практически не меняя энергии, а плазмон с частотой  $\omega_p(\vec{q})$  и волновым вектором  $\vec{q} \rightarrow 0$  переходит в состояние с частотой  $\omega_p(\vec{q}')$ . В нулевом приближении функции распределения  $P_k, P_{k+q}$  имеют вид ступенчатых функций. Раскладывая  $P_{k+q}$  в ряд по степеням  $q$  и учитывая затухания длинноволновых плазмонов,

для продольной диэлектрической функции  $\varepsilon(q, \omega)$  в области частот  $\omega \cong \omega_p$ , получим следующий результат:

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} f(q_c) \left\{ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{v_F q}{\omega_p} \right)^2 f(q_c)^2 \right\}, f(q_c) = 1 - 0.083 r_s (2i \operatorname{Arctg} q_c + \operatorname{Log} [1 + q_c^2]) \quad (12)$$

Согласно формуле (12), функция  $f(q_c)$  перенормирует абсолютную величину резонансной частоты и определяет затухание плазменных волн. В теории Бома и Пайнса [7,8]  $f(q_c) = 1$ .

### Закон дисперсии плазмонов

На рисунке представлены результаты расчета поправочного множителя  $\eta(r_s)$  в законе дисперсии плазмонов  $\omega_p^2(q) = \omega_p^2 + \frac{3}{5} \left( \frac{\hbar k_F}{m} q \right)^2 \eta(r_s)$  с использованием уравнения (12) для  $\varepsilon(q, \omega)$ .

Без учета затухания в функциях  $D^\pm$ , т.е. при  $\gamma \rightarrow 0$  (10),  $q_c = 2 \frac{q_m}{\gamma} \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Arctg} q_c = \pi/2$ .

Действительная часть функции  $f(q_c)$  при этом логарифмически расходится. Затухание плазмонов равно  $\gamma = 0.083 r_s \pi / \omega'_k(k_F)$ , если в нулевом приближении использовать значения  $q_c = 2 \frac{q_m}{\gamma} \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Arctg} q_c = \pi/2$ . При этом  $q_c = 2 \frac{q_m}{\gamma}$  и расходимость  $f(q_c)$  снимается.

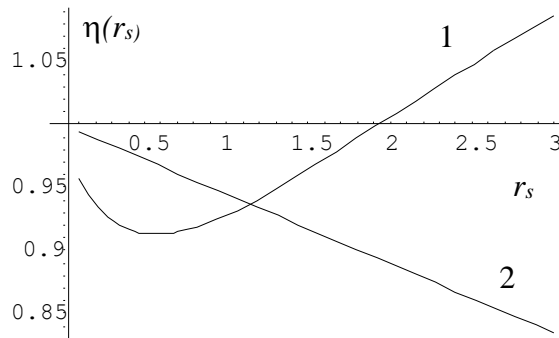


Рис. Зависимость функции  $\eta(r_s)$  от константы связи  $r_s$ , характеризующей влияние обмена и корреляций на закон дисперсии частот  $\omega_p(q)$  плазменных колебаний.

Кривая 1 построена с использованием формулы (12) настоящего расчета. Линейная зависимость в пределе слабой связи, кривая (2), получена в работах [7,9].

Величина  $\gamma = 0.083 r_s \pi / \omega'_k(k_F)$  определяет полуширину линии рассеяния, которая выражается через мнимую часть продольной диэлектрической функции. Предельное волновое число  $q_m$  в единицах  $k_F$ , которое характеризует рассеяние Ландау, равно  $q_m = p(1 + \sqrt{1 + p})^{-1}$ ,  $p = \frac{2m\omega_p}{\hbar k_F^2}$ .

Другое ограничение максимального волнового числа, при котором наше приближение справедливо, обусловлено моделью свободных электронов  $e_{lm}^{iqr} = \delta_{k_l, k_m + q}$ . Численный расчет, представленный на рисунке, выполнен при  $q_c = \frac{q_m}{\gamma}$ .

Развитая нами теория и количественно и качественно отличается от результатов слабой связи [7,9], которые демонстрируют линейную зависимость функции  $\eta(r_s) = 1 - 0.0553 r_s$  от константы связи  $r_s$ . Линейная зависимость, кривая (2), противоречит

экспериментальным данным [7,9]. Полученные нами результаты находятся в согласии с экспериментом [7,9].

### Выводы

Кулоновские расходимости обусловлены двумя Фурье-компонентами кулоновского взаимодействия  $V(q) = V_q^e + V_{-q}^e$ , соответствующими трансляционной симметрии. Суммирование ряда по степеням этого инфинитезимального возмущения позволяет получить уравнение (1), в котором расходящиеся слагаемые исключены, а, следовательно, функцию Грина (1) можно вычислить в нулевом приближении и получить результаты работ [8,9]. Однако уже в следующем приближении снова возникают кулоновские расходимости, которые мы исключили с помощью флуктуационно-диссипационной теоремы и определили продольную диэлектрическую функцию  $\epsilon(q, \omega)$  Ферми-жидкости (1-3) за пределами слабой связи  $r_s \rightarrow 0$ . Новыми результатами также являются уравнение для спектра электронов (7) с учетом статической экранировки и уравнение (12) для  $\epsilon(q, \omega)$  в области плазмонного резонанса с учетом затухания плазмонов. Показано, что время жизни длинноволновых плазмонов и их частота определяются двухплазмонными процессами резонансного рассеяния плазмона на электроне вблизи поверхности Ферми. Согласно эксперименту [7,9] коэффициент  $\eta(r_s)$  при малых значениях  $r_s$  меньше единицы, но с ростом  $r_s$  не уменьшается, как в случае слабой связи [7,9], а растет, проходя через ноль в области значений  $r_s \cong 2$ . Найденные нами закономерности согласуются с экспериментом.

### Литература:

1. АЙТАН, Е., ДЕВНАТН, В., КАРГАР, Ф., БАРЛАС, У., ЛАСЕРДА, М.М., ЛИ, Ж.Х., ЛЕЙК, Р.К., ШИ, Ж. и БАЛАНДИН, А.А. In: *Applied Physics Letters*, 2017, 111, 252402.
2. JOSHI, V.K. Engineering Science and technology. In: *An Intern. Journ.*, 2016, vol.19, p.1503-1513.
3. КЛЮКАНОВ А., НИКА, Д. Microscopic fermi-liquid approach to the resonant effects of spin-orbit interaction in solids. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Seria Științe Exacte și Economice*, 2018, nr.2(102), p.50-53.
4. SKOMSKI, R., DOWBEN, P.A. In: *Journal of Appl. Phys.*, vol.99, 08F508 (2006).
5. КЛЮКАНОВ А., НИКА Д. Двухчастичные функции Грина Ферми-жидкости. Rezumate ale comunicărilor. În: *Studia Universitatis Moldaviae. Seria Științe Exacte și Economice*. Chișinău: USM, 2019, p.237.
6. КЛЮКАНОВ, А., НИКА, Д. Намагниченность насыщения и теплоемкость ферромагнетика. In: *Studia Universitatis Moldaviae. Seria Științe Exacte și Economice*, 2016, nr.7(97), p.156-161.
7. PLATZMAN, P., WOLF P. Waves and interactions in the solid state plasmas. In: *Academic Press*, 1972.
8. ВОИМ, Д., ПИНС, Д. In: *Phys.Rev.* Vol. 92, з. 609. (1953)
9. KANAZAWA, H., MISAWA, S., FUJITA, E. *Progress of Theoretical Physics*, 1960, vol.23, Issue 3, p.426-432.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке в рамках институционального проекта Республики Молдова 15.817.02.29F.

### Данные авторов:

**Александр КЛЮКАНОВ**, доктор хабилитат, профессор, НИЛ физики и инженерии наноматериалов им. Е.Покатилова, Молдавский государственный университет.

**E-mail:** klyukanovalexandr@gmail.com

**Денис НИКА**, доктор хабилитат, профессор, НИЛ физики и инженерии наноматериалов им. Е.Покатилова, Молдавский государственный университет.

**E-mail:** dlnika@yahoo.com

Prezentat la 05.05.2020